Les fonctions logiques

La logique est une forme d'opération de la pensée qui nous permet de raisonner. C'est par exemple la démarche qui vous permettrait de résoudre l'énigme suivante :

> *Un homme regarde un portrait et dit : « Je n'ai ni frère ni sœur mais le père de cet homme est le fils de mon père ». Qui est représenté sur le portrait ?*

Les questions de logique sont parfois moins énigmatiques. :

> *S'il fait beau ce soir et si j'ai fini ma préparation, j'irai me promener.*

Nous tenterons de les ramener à des choix simples où les affirmations sont soit vraies soit fausses, les réponses aux questions sont oui ou non, il n'y a pas de valeurs intermédiaires.
La promenade est liée à deux conditions : la météo et le travail qui reste à faire. Les différentes situations sont représentées dans ce qu'on appelle une table de vérité :

Il fera beau	Mon travail sera achevé	J'irai me promener
Non	Non	**Non**
Non	Oui	**Non**
Oui	Non	**Non**
Oui	Oui	**Oui**

Essayez avec la proposition suivante :

> *L'accusé sera disculpé si l'enquête révèle qu'il s'agit d'un suicide ou s'il peut faire la preuve qu'il était ailleurs au moment des faits.*

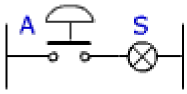
Dans le premier cas, la promenade dépend de deux conditions qui doivent être simultanées.
Dans le second cas, une seule condition suffit pour disculper l'accusé.

Bon nombre de chercheurs ont tenté de trouver une manière infaillible de raisonner. George Boole traduisit les relations logiques en équations ce qui donna l'***algèbre booléenne***. Il définit ainsi les règles qui permettent de faire des raisonnements valides pour autant que les « variables logiques » ne puissent avoir que deux valeurs possibles : Oui ou Non, Vrai ou faux, 1 ou 0. Ce doivent être des « ***variables binaires*** »
Shannon (1916-2001), l'inventeur du mot « bit », démontra que l'algèbre de Boole était applicable aux circuits électriques. Cela permit à cette époque d'automatiser les centraux téléphoniques. Cette analogie est reprise ci-dessous pour matérialiser le fonctionnement des opérations logiques.

Les fonctions logiques sont en informatique aussi courantes si pas plus que les opérations arithmétiques. La logique combinatoire tout comme l'arithmétique repose sur quelques opérations élémentaires.
En **arithmétique**, ces opérations sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division (**+, -, x, /**). Il est possible à partir de là d'imaginer toutes les autres opérations telles que les exposants, les racines, les logarithmes etc.
En **logique**, les opérations fondamentales sont le **ET**, le **OU** et le **NON**.

La manière la plus simple de comprendre les fonctions logiques est de se les représenter par des schémas électriques qui comportent un ou plusieurs boutons poussoirs et une lampe. Cette lampe s'allume à condition que les contacts électriques y laissent passer le courant.

Le schéma ci-contre traduit la condition la plus simple :
La lampe s'allume si le bouton poussoir A est actionné.
Autrement dit (S = 1) si (A = 1)



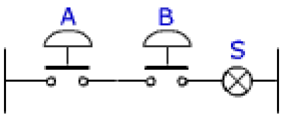
Le fonctionnement de ce circuit s'exprime par l'<u>équation logique</u> $S = A$

Il n'y a que deux cas possibles. Ils sont représentés dans une <u>table de vérité</u>
Une table de vérité a pour le rôle de montrer la correspondance entre la sortie et toutes les combinaisons de valeurs que peuvent prendre la ou les entrées.

A	S
0	0
1	1

Plaçons maintenant deux contacts dans le circuit. La condition nécessaire pour allumer la lampe dépend de la manière dont les contacts sont connectés. Suivant les cas, la condition pour allumer la lampe fait appel aux opérateurs logiques ET ou OU.

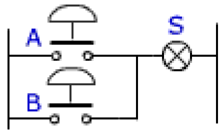
La fonction ET



La lampe s'allume si on active simultanément les contacts A <u>et</u> B

(S = 1) si (A = 1) ET (B = 1)

La fonction OU



La lampe s'allume si on active le contact A <u>ou</u> le contact B

(S = 1) si (A = 1) OU (B = 1)

<u>Tables de vérités</u>

A	B	A et B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A ou B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

<u>Equations logiques</u>

$$S = A \cdot B$$

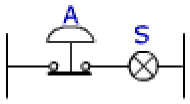
Le point représente l'opérateur ET.
Ce signe convient parfaitement puisque la fonction ET donne le même résultat qu'une multiplication.

$$S = A \dot{+} B$$

L'opérateur OU est représenté par un signe plus surmonté d'un point. Observons les trois premières ligne de la table de vérité, le résultat de l'opération OU y est semblable au résultat d'une addition.
Le résultat de 1 ou 1 diffère cependant de 1+1. Nous mettons un point au-dessus du signe '+' pour indiquer que l'opération n'est pas identique à l'addition.

La fonction NON

Les contacts que nous avons utilisés jusqu'ici, sont des contacts « normalement ouverts ». Quand le bouton poussoir est relâché (quand A = 0) le courant ne passe pas.
Nous utilisons maintenant un contact « normalement fermé » pour illustrer la fonction NON. Le courant traverse le bouton poussoir quand il est relâché mais le courant se coupe quand on actionne le contact (quand A = 1).



$$S = \overline{A}$$

Lire « S = non A »

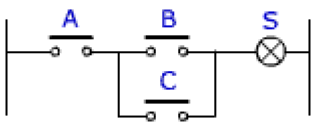
Table de vérité

A	Non A
0	1
1	0

Combinaisons de fonctions logiques

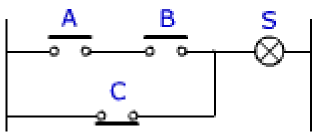
Les trois fonctions de base que nous venons de voir se combinent de multiples façons. A chaque schéma imaginable correspond une équation. La correspondance entre un schéma et une fonction logique est systématique :
- Des contacts en parallèle correspondent à la fonction OU
- Des contacts en série correspondent à la fonction ET
- Un contact normalement fermé représente la fonction NON

Exemples :



$$S = A .(B + C)$$

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

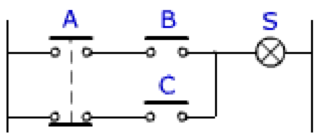


$$S = (A . B) + \overline{C}$$

A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Tout comme en algèbre la même variable peut apparaître plusieurs fois dans une même équation. C'est le cas dans l'exemple suivant : $S = (A . B) + (\overline{A} . C)$

Quand A vaut 1 dans le premier terme, son complément vaut simultanément 0 dans le second.



$$S = (A \, . \, B) + (\overline{A} \, . \, C)$$

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Propriétés des fonctions logiques

OR

Commutativité	$A + B = B + A$
Associativité	$A + B + C = A + (B + C) = (A + B) + C$
Cas particuliers	$A + 1 = 1$
	$A + 0 = A$
	$A + \overline{A} = 1$

ET

Commutativité	$A \, . \, B = B \, . \, A$
Associativité	$A \, . \, B \, . \, C = (A \, . \, B) \, . \, C = A \, . \, (B \, . \, C)$
Cas particuliers	$A \, . \, 1 = A$
	$A \, . \, 0 = 0$
	$A \, . \, \overline{A} = 0$

Distributivité

$$A \, . \, (B + C) = A \, . \, B + A \, . \, C$$

$$A + (B \, . \, C) = (A + B) \, . \, (A + C)$$

OU exclusif

Si $A \oplus B = C$ alors $A \oplus C = B$ et $B \oplus C = A$

Théorème de de Morgan

$$\overline{A \, . \, B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} \, . \, \overline{B}$$